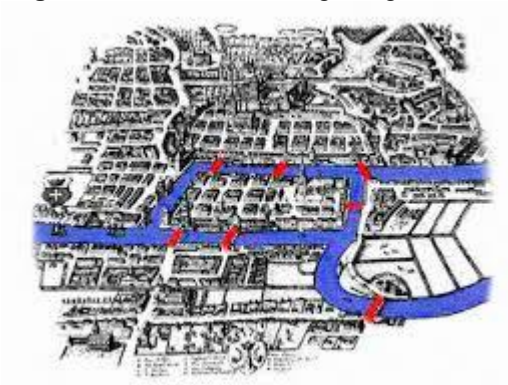


1 HISTÓRICO

A Teoria dos Grafos surgiu por volta do século XVIII, a partir de um problema conhecido como “As Pontes de *Königsberg*”. Esse fato ocorreu em uma região situada na antiga Prússia Ocidental, cortada por um rio que abrigava duas ilhas. Uma delas era ligada por três pontes, uma a cada margem e outra conectando as ilhas entre si, enquanto a segunda possuía quatro pontes que a uniam às margens do rio, sendo duas para cada lado. A Figura 1 é uma ilustração da cidade cortada pelo rio.

Figura 1 - Pontes de Königsberg

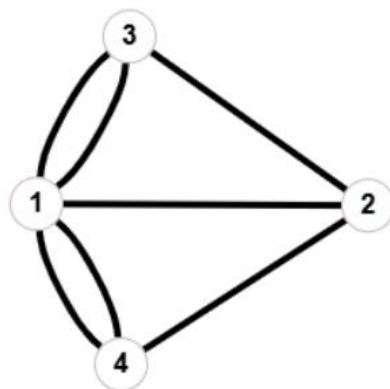


Fonte: Superinteressante

Observa-se que a cidade estava dividida em quatro regiões. O problema consistia em determinar se seria possível, partindo de uma dessas regiões, atravessar todas as pontes sem repeti-las, visitar todas as demais regiões e retornar ao ponto de partida. Em 1736, o matemático e físico Leonard Euler (1707-1783) mostrou que era impossível realizar tal percurso por meio de argumentos que deu origem a Teoria dos Grafos.

Euler modelou o problema por meio de uma estrutura que hoje conhecemos como grafo, conforme ilustrado na Figura 2. Um elemento importante para essa modelagem foi o fato de que para resolver o problema não interessava o comprimento das pontes nem o tamanho de cada região.

Figura 2 - Representação das pontes de *Konigsberg* por meio de Grafo



Fonte: Autor.

Na modelagem, cada região da cidade foi representada por um ponto (vértice) e cada ponte foi representada por uma linha ligando dois pontos (arestas). Na ocasião, Euler notou que em cada vértice incide uma quantidade ímpar de arestas, motivo pelo qual seria impossível realizar o percurso desejado.

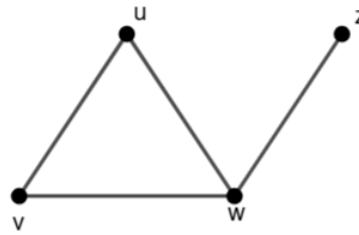
2 DEFINIÇÕES E TEOREMAS

As definições, teoremas e demonstrações apresentadas nesta seção foram fundamentadas em Sousa (2001), Jurkiewicz (2007) e Gomes (2022).

Definição 2.1(Grafo). *Um grafo $G=(V, E)$ é definido por um conjunto não vazio V de vértices e um conjunto E de arestas, em que cada aresta $e \in E$ é definida por um par não-ordenado de vértices, denotado por (u, v) ou uv , sendo u e $v \in V$.*

Em resumo, um grafo é a representação gráfica de pontos (vértices) conectados por linhas (arestas). Por exemplo, um mapa pode ser representado por um grafo, onde as cidades seriam os vértices e as estradas que conectam as cidades seriam as arestas. A notação de um grafo G pode ser por meio da representação do conjunto de vértices V e do conjunto de arestas E . O grafo G da Figura 3 pode ser representado por $V=\{u, v, w, z\}$ e $E=\{(u, v), (u, w), (v, w), (w, z)\}$.

Figura 3 - Grafo G



Fonte: Autor

Definição 2.2 (Incidência). *É a propriedade de uma aresta estar conectada a um vértice.*

Por exemplo, no grafo G da Figura 3 a aresta uv é incidente ao vértice u e também ao vértice v .

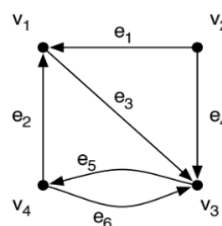
Definição 2.3 (Adjacência). *É a propriedade de dois vértices estarem conectados por intermédio de uma aresta. Dois vértices adjacentes também podem ser chamados de vizinhos.*

Note que, o vértice w , na Figura 3, é adjacente aos vértices u , v e z . O vértice u não é adjacente ao vértice z .

Definição 2.4 (Grafo Direcionado, Grafo orientado ou Dígrafo). *Um grafo direcionado $G=(V,E)$ é definido por um conjunto não vazio V de vértices e um conjunto E de arestas, em que cada aresta $e \in E$ é definida por um par ordenado (u,v) , sendo ambos u e $v \in V$. O vértice u é origem, e o vértice v é destino da aresta e .*

Abaixo, na Figura 4, tem-se a ilustração de um grafo direcionado.

Figura 4 - Grafo direcionado (ou dígrafo)



Fonte: Gomes (2022, p.10).

Na representação gráfica de um grafo direcionado, as arestas apresentam setas indicando o sentido ou orientação. Uma situação que poderia ser modelada utilizando este tipo de grafo seria a representação de usuários que seguem outros nas

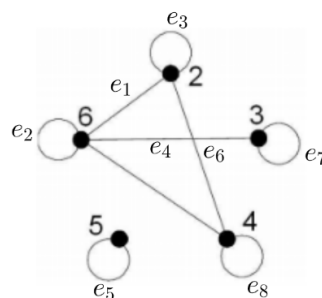
redes sociais. Por exemplo, na Figura 4, supondo que cada vértice representa uma pessoa e que as arestas indicam se um usuário segue ou não outra pessoa numa determinada rede social, então pode-se concluir que o indivíduo v_2 segue v_1 e v_3 , mas o contrário não acontece. Ou seja, v_3 não é seguido por nenhum outro usuário.

Definição 2.5 (Laço). *Um laço é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo.*

Definição 2.6 (Arestas paralelas). *Arestas paralelas são conjuntos de duas ou mais arestas que conectam o mesmo par de vértices.*

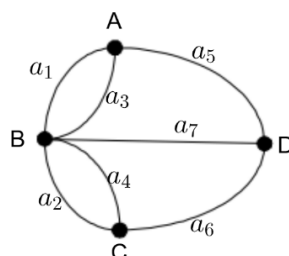
Nas Figura 5 e 6, observa-se, respectivamente, grafos com laços e arestas paralelas.

Figura 5 - Grafo com laços



Fonte: Adaptado Jurkiewicz (2007, p.11)

Figura 6 - Grafo com arestas paralelas



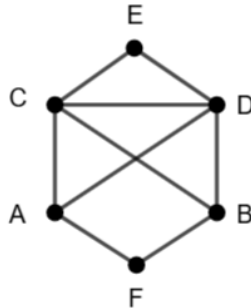
Fonte: Adaptado Jurkiewicz (2007, p.12)

Veja que no grafo da Figura 5 tem-se que as arestas e_2 , e_3 , e_5 , e_7 e e_8 são laços dos vértices 6, 2, 5, 3 e 4, respectivamente. Por outro lado, na Figura 6, as arestas a_1 e a_3 são paralelas, bem como a_2 e a_4 .

Definição 2.7 (Grafo simples). *Um grafo simples (ou dígrafo simples) é um grafo que não contém laços e nem arestas paralelas.*

Na Figura 7, tem-se um grafo simples.

Figura 7 - Grafo simples

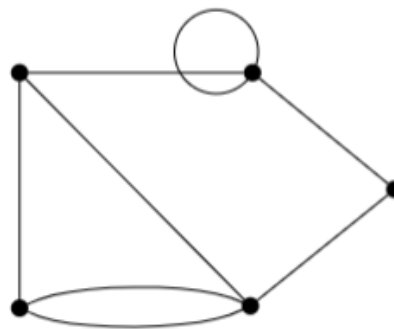


Fonte: Autor

Definição 2.8 (Multigrafo). *Um multigrafo é um grafo (ou dígrafo) que contém pelo menos um laço ou um conjunto de arestas paralelas.*

A Figura 8 ilustra um multigrafo.

Figura 8 - Multigrafo



Fonte: Autor

Definição 2.9 (Ordem). *A ordem de um grafo representa a cardinalidade do conjunto V . Em outras palavras, a ordem representa a quantidade de vértices do grafo, a qual é denotada por $|V|$ ou pela letra n .*

Definição 2.10 (Tamanho). *O tamanho de um grafo representa a cardinalidade do conjunto E . Em outras palavras, o tamanho representa a quantidade de arestas do grafo, a qual é denotada por $|E|$ ou pela letra m .*

Na Figura 8, tem-se um grafo com ordem $n = 5$ ou $|V| = 5$ e tamanho $m = 8$.

Definição 2.11 (Grau de vértice). *O grau de um vértice é igual à quantidade de arestas incidentes ao vértice, com cada laço sendo contado duas vezes. O grau de um vértice pode ser denotado por $d(v)$.*

Teorema: *Para todo grafo G , a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas. Isto é,*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot m$$

Demonstração: Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

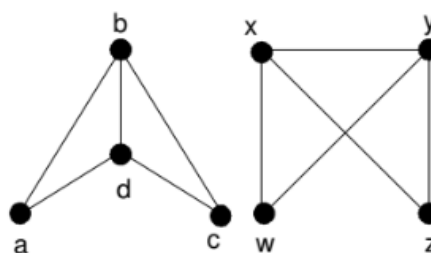
Corolário: *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração: Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto, é um número par, ou seja, a quantidade de parcelas ímpares é par. Portanto, o número de vértice de graus ímpares é sempre par.

Definição 2.12 (Grafos isomorfos). *Dois grafos G_1 e G_2 são ditos isomorfos se existe uma correspondência 1-a-1 entre seus conjuntos de vértices que preserve as adjacências.*

Na Figura 9, tem-se a ilustração de dois grafos isomorfos.

Figura 9 - Grafos isomorfos



Fonte: Jurkiewicz (2007, p.14)

Note que podemos estabelecer uma correspondência f entre os conjuntos de vértices dos dois gráficos da seguinte maneira, por exemplo:

$a-w$

$c-z$

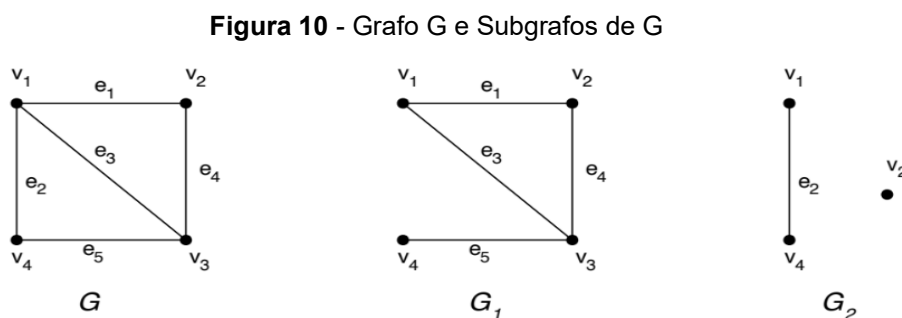
$b-x$

$d-y$.

Esta função está bem definida. Com efeito, se tomarmos uma aresta no primeiro grafo (digamos (a, d)) a função fará a correspondência com (w, y) que é uma aresta no segundo grafo. Se tomarmos dois vértices que não são ligados por uma aresta (digamos a e c) a função fará corresponder dois vértices (w e z) que também não são ligados.

Definição 2.13 (Subgrafos). *Um subgrafo de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo cujos vértices são vértices de G e cujas arestas são arestas de G .*

Na Figura 10, tem-se dois subgrafos G_1 e G_2 obtidos a partir do grafo G .



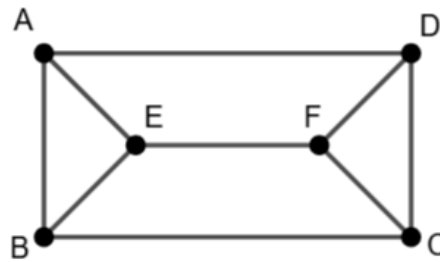
Fonte: Gomes, (2022, p.17)

Os grafos são classificados de acordo com suas características estruturais. Veja abaixo tais classificações.

Definição 2.14 (Grafos regular). *Um grafo é dito regular se todos os seus vértices tem o mesmo grau. Um grafo é chamado de r -regular ou regular de grau r se o grau de cada um de seus vértices é igual a r .*

A Figura 11 apresenta um grafo 3-regular. Ou seja, um grafo regular de grau 3.

Figura 11 - Grafo 3-regular



Fonte: Autor

Teorema: Seja G um grafo r -regular com n vértices. Então G tem $nr/2$ arestas.

Demonstração: Seja G um grafo com n vértices, cada um com grau r , então a soma dos graus de todos os vértices é igual a nr . Pelo Teorema 2.2.1, o número de arestas de um grafo é igual à metade desta soma, portanto igual a $nr/2$.

Definição 2.15 (Grafo nulo). *Grafo nulo é um grafo sem arestas. O grafo nulo é denotado por N_n em que n representa o número de vértices do grafo.*

Um exemplo de grafo nulo pode ser visualizado na Figura 12. Trata-se do grafo N_6 .

Figura 12 - Grafo nulo N_6

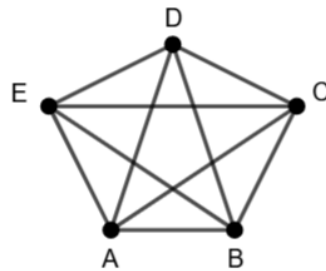


Fonte: Autor

Definição 2.16 (Grafo completo). *Grafo completo é um grafo simples em que cada par de vértices distintos é adjacente. Nós denotamos o grafo completo com n vértices por K_n .*

Observe que todo grafo completo é também um grafo regular. A Figura 13 ilustra um grafo completo com 5 vértices, podendo ser chamado também de 4-regular.

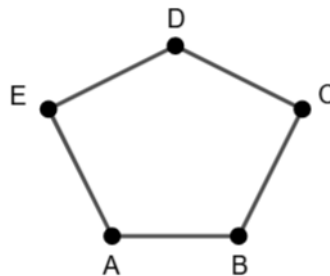
Figura 13 - Grafo completo K_5



Fonte: Autor

Definição 2.17 (Grafo ciclo). *Grafo ciclo é um grafo constituído por apenas um ciclo de vértices e arestas. O grafo ciclo com n vértices é denotado por C_n . A Figura 14 representa um grafo ciclo.*

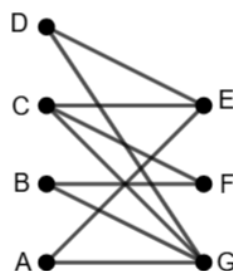
Figura 14 - Grafo ciclo C_5



Fonte: Autor

Definição 2.18 (Grafo bipartido). *Um grafo bipartido $G=(V_1 \cup V_2, E)$ é definido por dois conjuntos de vértices V_1 e V_2 em que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e um conjunto E de arestas, tal que, para cada aresta $e \in E$, tem-se que $e=(u, v)$ e $u \in V_1$ e $v \in V_2$. Os conjuntos V_1 e V_2 são chamados de subconjuntos de bipartição de G . Veja, na Figura 15, um grafo bipartido.*

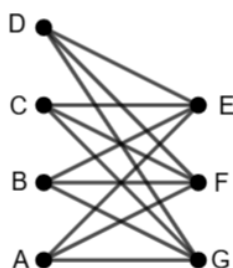
Figura 15 - Grafo bipartido



Fonte: Autor

Definição 2.19 (Grafo bipartido completo). *Um grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é um grafo simples bipartido no qual todos os pares de vértices u e v tais que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ são adjacentes.* A Figura 16 ilustra o grafo bipartido completo.

Figura 16 - Grafo bipartido completo $K_{4,3}$



Fonte: Autor

Vários problemas importantes da Teoria dos Grafos estão relacionados em transitar pelas arestas. A seguir, apresentaremos algumas definições que utilizam as arestas de um grafo.

Definição 2.20 (Percurso). *Em um grafo não direcionado, podemos definir um percurso $P=(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$ como sendo uma sequência de vértices e arestas tal que o vértice final de uma aresta no percurso é igual ao vértice inicial da próxima aresta.*

Definição 2.21 (Comprimento). *Em um percurso, seu comprimento é igual à quantidade de arestas percorridas no percurso. O comprimento do percurso é dado por $\delta(s, v)$. Se não existir percurso possível entre os vértices v_0 e v_n , então $\delta(v_0, v_n) = \infty$.*

Definição 2.22 (Percurso fechado). *Um percurso é dito fechado se seu primeiro vértice é igual ao último, isto é: $v_0=v_n$. Caso contrário, o percurso é aberto.*

Definição 2.23 (Trilha). *Em um grafo, uma trilha é um percurso sem repetição de arestas.*

Definição 2.24 (Caminho). *Em um grafo, um caminho é uma trilha sem repetição de vértices (exceto pelos vértices inicial e final, eventualmente).*

Um percurso, trilha ou caminho é trivial se tiver somente um vértice e nenhuma aresta.

Definição 2.25 (Ciclo). *Em um grafo, um ciclo é um caminho fechado com mais de um vértice, ou seja, é um caminho fechado não trivial.*

Definição 2.26 (Circuito). *Em um grafo, um circuito é uma trilha fechada.*

Definição 2.27 (Caminho mínimo). *Dados dois vértices s e v , o caminho mínimo $s \rightsquigarrow v$ é definido como o caminho de menor comprimento dentre todos os caminhos existentes entre s e v . Note que, dependendo da estrutura do grafo, pode haver mais de um caminho mínimo $s \rightsquigarrow v$.*

Na Teoria dos Grafos existem dois tipos de grafos especiais, denominados Grafos Eulerianos e Grafos Hamiltonianos, que compõe uma dupla de grafos com aplicação em vários problemas da matemática e de outras áreas. O primeiro deles surgiu na formulação e solução do problema das setes pontes de *Koenigsberg* estudada por Leonard Euler. O segundo surgiu a partir dos estudos Sir William R. Hamilton (1805-1865) na tentativa de procurar em um grafo G uma trilha fechada que passe por todos os vértices uma e só uma vez. As definições e teoremas envolvendo esses importantes grafos serão apresentados a seguir.

Definição 2.28 (Grafos Eulerianos). *Um grafo com m arestas é dito euleriano se existe uma trilha fechada de comprimento m em G ; em outras palavras, se podemos percorrer cada aresta uma e só uma vez partido de um vértice e a ele retornando.*

Definição 2.29 (Grafos semi-euleriano). *Se o grafo não é euleriano mas tem uma trilha aberta de comprimento m , ele é dito semi-euleriano.*

Teorema: *Se todo vértice de um grafo (não necessariamente simples) G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração: Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos

simples. A partir de um vértice v_0 , qualquer, iniciamos nossa trilha. Quando chegamos a um vértice qualquer, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o Teorema está provado.

Teorema de Euler: *Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é euleriano se e somente se todos os seus vértices tem grau par.*

Demonstração:

Suponhamos que o grafo conexo G seja euleriano. Dessa maneira, por definição existe uma trilha fechada de comprimento m . Cada vez que a trilha passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

Agora, por outro lado, suponhamos que G seja um grafo com todos os vértices de grau par. Vamos usar indução sobre o número de arestas m do grafo para mostrar a existência de uma trilha fechada de comprimento m . Por vacuidade, o teorema é válido quando $m = 0$. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior do que 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todas as trilhas fechadas em G escolhemos uma trilha T com comprimento máximo. Se T tem comprimento m , o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T . Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T , e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H , e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando T com a trilha em H . Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T . Portanto, um grafo conexo (não necessariamente simples) G é euleriano se e somente se todos os seus vértices tem grau par.

Definição 2.30 (Ciclo e Grafo Hamiltoniano). *Um grafo conexo é hamiltoniano se contiver um ciclo que inclua cada um dos seus vértices apenas uma vez. Tal ciclo é chamado de Ciclo Hamiltoniano.*

Diferentemente do grafo euleriano, ainda não existe um teorema geral e eficiente que permita determinar se um grafo é ou não hamiltoniano. Essa limitação

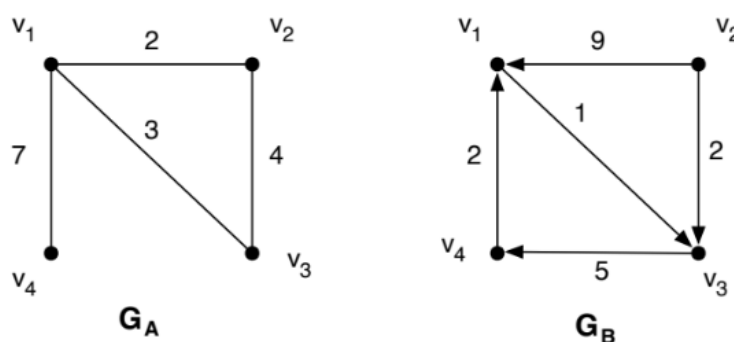
constitui um dos problemas mais investigados na Teoria dos Grafos, devido à sua ampla aplicabilidade em áreas como comunicação, transporte e planejamento.

Definição 2.31 (Grafo valorado). *Um grafo valorado é um grafo (dirigido ou não dirigido) no qual cada uma de suas arestas está associada a um valor numérico chamado peso ou custo da aresta.*

O custo de uma aresta representa algum dado significativo do problema modelado pelo grafo. Este dado pode ser distância, custo monetário, tempo, ou qualquer outro parâmetro relevante que pode ser expresso como um valor numérico. Dependendo do problema, pode-se, inclusive, ter custos negativos.

Os grafos G_A e G_B na Figura 17 são exemplos de grafos valorados.

Figura 17 - Exemplos de grafos valorados



Fonte: Gomes (2022, p. 119)

TEOREMA DAS QUATRO CORES

O Problema das Quatro Cores consiste em determinar o número mínimo de tonalidades necessárias para colorir um mapa, real ou imaginário, de modo que regiões que compartilham fronteiras recebam cores diferentes.

A origem desse instigante problema, de acordo com Sousa (2001), remonta a 1852, quando Francis Guthrie (1831-1899), advogado, botânico e matemático, tentou colorir o mapa da Inglaterra seguindo essa regra. Ele concluiu que não apenas aquele mapa, mas qualquer outro, poderia ser colorido utilizando apenas quatro cores. Francis apresentou a ideia ao irmão, Frederick Guthrie, aluno de Augustus De

Morgan¹. Ainda em 1852, Frederick expôs o problema a seu professor, que demonstrou grande interesse e imediatamente enviou uma carta ao renomado matemático Sir William Rowan Hamilton relatando a questão. No entanto, Hamilton não deu prosseguimento ao assunto.

De Morgan foi um dos principais responsáveis por divulgar o problema na comunidade científica, mas, apesar disso, por muitos anos ele não recebeu atenção prioritária dos pesquisadores. Em 1878, Arthur Cayley (1821-1895), advogado e matemático, voltou-se ao tema e publicou considerações relevantes sobre a conjectura. Seu aluno, Alfred Bray Kempe, apresentou em 1879 uma demonstração da proposta formulada por Francis Guthrie. Essa demonstração foi amplamente analisada por matemáticos de destaque, que sugeriram modificações e melhorias.

Contudo, em 1890, Percy John Heawood identificou uma falha no trabalho de Kempe e demonstrou que um mapa poderia ser colorido com, pelo menos, cinco cores, estabelecendo o Teorema das Cinco Cores. Heawood e diversos pesquisadores continuaram contribuindo significativamente para o estudo desse clássico desafio matemático.

Finalmente, conforme aponta Sousa (2001), em 1976, com o auxílio de um computador IBM 360, em Urbana (Illinois), Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram a primeira demonstração completa do Teorema das Quatro Cores.

Quando a notícia do feito se espalhou pelos vários departamentos de matemática, houve um enorme entusiasmo, muitos professores interromperam as aulas para comemorar. Mas a euforia esfriou em muitos deles quando souberam que essa demonstração incluía mais de mil horas do uso de computadores de alta velocidade. A prova era demasiado longa para ser verificada à mão e havia sempre a possibilidade de os computadores terem cometido algum erro de difícil detecção. Hoje em dia a validade da demonstração é aceite na generalidade da comunidade matemática, mas continua a ser polêmica. Está em causa o reconhecer uma argumentação baseada numa enorme quantidade de cálculos por computador, impossíveis de ser verificados detalhadamente por um ser humano durante toda a sua vida. (Sousa, 2001)

¹ Augustus De Morgan (1806–1871) foi um matemático e lógico britânico nascido na Índia. Destacou-se por suas contribuições à Lógica Matemática, especialmente pelas Leis de De Morgan, além de estudos sobre indução matemática, álgebra simbólica e números complexos. Também foi professor da Universidade de Londres e primeiro presidente da London Mathematical Society.

Percebe-se que a tecnologia desempenha um papel fundamental no avanço das descobertas científicas. Isso pode ser observado na demonstração do Teorema das Quatro Cores, realizada em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, considerada um marco histórico por utilizar um computador para auxiliar na prova matemática. Tal fato evidenciou novas possibilidades para a Matemática, ao mostrar que problemas extremamente complexos podem ser resolvidos com o auxílio computacional.

ALGORITMO DE DIJKSTRA

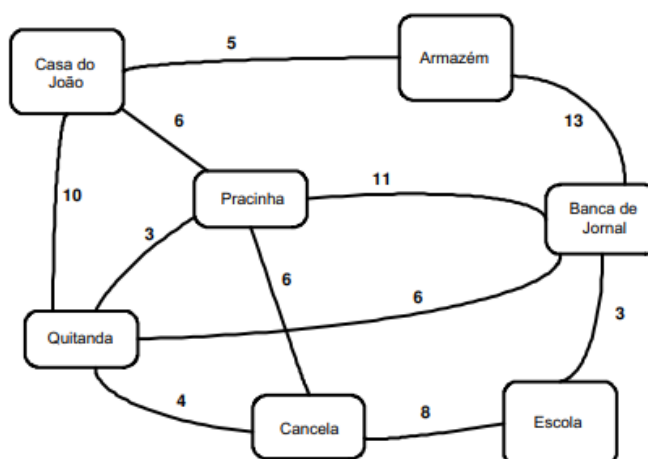
Nesta seção, apresenta-se um importante algoritmo de otimização em grafos, chamado de algoritmo de Dijkstra. Ressalta-se que a abordagem adotada se concentra na execução do algoritmo, não contemplando a sua implementação em linguagem de programação, uma vez que tal enfoque foge aos objetivos deste trabalho. Os conceitos aqui apresentados estão fundamentados em Jurkiewicz (2007) e Boaventura e Jurkiewicz (2009).

Na Teoria dos Grafos, um dos problemas mais relevantes consiste na determinação do caminho mínimo entre dois vértices em um grafo ponderado. Esse problema possui ampla aplicabilidade em situações do cotidiano, especialmente na área de logística. Por exemplo, em uma grande empresa que realiza entregas, a identificação de rotas de menor custo contribui significativamente para a otimização do tempo de deslocamento e para a redução dos custos operacionais.

Dentre os algoritmos da Teoria dos Grafos capazes de resolver o problema do caminho mínimo, o algoritmo de Dijkstra, desenvolvido em 1956 por Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002) se destaca em relação aos demais.

Para a compreensão da execução desse algoritmo, considera-se um problema de caminho mínimo apresentado em Jurkiewicz (2007), o qual será resolvido por meio do algoritmo de Dijkstra. Trata-se de uma situação em que um adolescente deve determinar a rota a ser percorrida de sua residência até a escola, considerando a passagem por diferentes pontos do bairro, conforme Figura 18.

Figura 18 - Representação do bairro por meio de grafo



Fonte: Jurkiewicz (2007, p.34)

Nesse problema, o comprimento da aresta não está, necessariamente, relacionado ao valor a ela atribuído. Contudo, tal aspecto não interfere no objetivo principal da situação-problema, que consiste em determinar o menor caminho entre o vértice que representa a casa de João e o vértice que representa a escola.

Solução do problema por meio do Algoritmo de Dijkstra: Para solução do problema, criaremos uma tabela com $n + 1$ linhas e $n + 1$ colunas, onde n representa o número de vértices do grafo. Como há 7 vértices, a tabela deve ter 8 linhas para representar as iterações e 8 colunas para representação dos vértices, conforme Tabela 1. Vamos representar os vértices por letras: Casa de João (J), Armazém (A), Pracinha (P), Quitanda (Q), Banca de Jornal (B), Cancela (C) e Escola (E).

Tabela 1 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°							
2°							
3°							
4°							
5°							
6°							
7°							

Fonte: Autor

O ponto de partida é a casa de João (J). Será utilizado a notação (d, V) , onde d representa a distância do ponto de partida aos vértices adjacentes, que representaremos por V . Para vértices não adjacentes, utilizaremos o símbolo ∞ , para não atrapalhar o algoritmo. Considera-se distância 0 na casa de João, ou seja, representaremos por $(0, J)$, conforme ilustra a Tabela 2.

Tabela 2 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	$(0, J)$	$(5, J)$	$(6, J)$	$(10, J)$	∞	∞	∞
2°	$(0, J)$						
3°	$(0, J)$						
4°	$(0, J)$						
5°	$(0, J)$						
6°	$(0, J)$						
7°	$(0, J)$						

Fonte: Autor

Na tabela 2, a casa de João está fixada porque não há como minimizar a distância, dessa forma toda coluna foi preenchida. Perceba que no Armazém foi preenchido com $(5, J)$. Isto significa que para chegar ao armazém, João percorrerá a distância de 5 vindo do vértice J. O mesmo foi feito para os vértices P e Q. Note que o vértice J não é adjacente aos vértices B, C e E, por isso essas colunas foram preenchidas com o símbolo infinito.

Agora, deve-se observar, entre os pontos em aberto na tabela (A, P e Q), qual tem custo mínimo e fixá-lo na coluna correspondente. Entre os abertos, o que possui distância mínima é o Armazém com 5. Não há como melhorar essa distância partindo do vértice J, então pode-se fixar na próxima linha e preencher toda coluna do vértice A. A partir do vértice A, só é possível atingir o vértice B (não faz sentido voltar ao vértice J) com um custo de $5 + 13 = 18$ que é menor que infinito, logo, conforme Tabela 3, temos:

Tabela 3 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	(0,J)	(5,J)	(6,J)	(10,J)	∞	∞	∞
2°	(0,J)	(5,J)	(6,J)	(10,J)	(18,A)	∞	∞
3°	(0,J)	(5,J)					
4°	(0,J)	(5,J)					
5°	(0,J)	(5,J)					
6°	(0,J)	(5,J)					
7°	(0,J)	(5,J)					

Fonte: Autor

Entre os vértices em aberto, o que possui custo mínimo é o P, então, na próxima linha, tal vértice é fixado e sua coluna é preenchida, conforme Tabela 4:

Tabela 4 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	(0,J)	(5,J)	(6,J)	(10,J)	∞	∞	∞
2°	(0,J)	(5,J)	(6,J)	(10,J)	(18,A)	∞	∞
3°	(0,J)	(5,J)	(6,J)				
4°	(0,J)	(5,J)	(6,J)				
5°	(0,J)	(5,J)	(6,J)				
6°	(0,J)	(5,J)	(6,J)				
7°	(0,J)	(5,J)	(6,J)				

Fonte: Autor

A partir de P pode-se atingir B, C e Q. É possível atingir B com um custo de $6 + 11 = 17$ que é menor que 18, então procede-se com essa substituição na tabela, porque a ideia é sempre procurar o menor caminho. É possível atingir C com um valor de $6 + 6 = 12$ que é menor que infinito. E por fim, é possível atingir Q com um custo de $6 + 3 = 9 < 10$, logo também deve-se fazer essa substituição na tabela. Veja como fica na Tabela 5:

Tabela 5 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	∞	∞	∞
2°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	(18, A)	∞	∞
3°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(17, P)	(12, P)	∞
4°	(0, J)	(5, J)	(6, J)				
5°	(0, J)	(5, J)	(6, J)				
6°	(0, J)	(5, J)	(6, J)				
7°	(0, J)	(5, J)	(6, J)				

Fonte: Autor

Na próxima linha, fixa-se o vértice Q, pois é o que possui menor custo em aberto, conforme Tabela 6.

Tabela 6 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	∞	∞	∞
2°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	(18, A)	∞	∞
3°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(17, P)	(12, P)	∞
4°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)			
5°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)			
6°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)			
7°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)			

Fonte: Autor

A partir de Q pode-se atingir B e C com distâncias, respectivamente, de $9 + 6 = 15$ e $9 + 4 = 13$. Como $15 < 17$ deve-se fazer essa substituição na coluna de B e na coluna C permanece, pois $13 > 12$, conforme Tabela 7.

Tabela 7 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	∞	∞	∞
2°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	(18, A)	∞	∞
3°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(17, P)	(12, P)	∞
4°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	∞
5°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)			
6°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)			
7°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)			

Fonte: Autor

Fixa-se C, pois é o menor em aberto, como ilustra a Tabela 8.

Tabela 8 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	∞	∞	∞
2°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	(18, A)	∞	∞
3°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(17, P)	(12, P)	∞
4°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	∞
5°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)		(12, P)	
6°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)		(12, P)	
7°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)		(12, P)	

Fonte: Autor

A partir de C é possível atingir E com distância de $12 + 8 = 20 < \infty$. Como não é possível atingir B, apenas repete-se (15, Q), conforme a Tabela 9.

Tabela 9 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	∞	∞	∞
2°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	(18, A)	∞	∞
3°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(17, P)	(12, P)	∞
4°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	∞
5°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	(20, C)
6°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)		(12, P)	
7°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)		(12, P)	

Fonte: Autor

Apartir do vértice B, atinge-se E com valor de $15 + 3 = 18$ que é menor que 20.

Tabela 10 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	∞	∞	∞
2°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	(18, A)	∞	∞
3°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(17, P)	(12, P)	∞
4°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	∞
5°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	(20, C)
6°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	(18, B)
7°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	

Fonte: Autor

Tabela 11 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	∞	∞	∞
2°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	(18, A)	∞	∞
3°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(17, P)	(12, P)	∞
4°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	∞
5°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	(20, C)
6°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	(18, B)
7°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	(18, B)

Fonte: Autor

Por fim, como ilustra a Tabela 11, basta fixar a coluna E.

Portanto, por meio do algoritmo de Dijkstra, foi possível determinar a menor distância do vértice J (Casa de João) ao vértice E (Escola). Além disso, tem-se a menor distância da casa de João (J) a qualquer outro vértice.

Tabela 12 - Problema do menor caminho

	J	A	P	Q	B	C	E
1°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	∞	∞	∞
2°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(10, J)	(18, A)	∞	∞
3°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(17, P)	(12, P)	∞
4°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	∞
5°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	(20, C)
6°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	(18, B)
7°	(0, J)	(5, J)	(6, J)	(9, P)	(15, Q)	(12, P)	(18, B)

Fonte: Autor

Na última linha tem-se a solução. A leitura do par ordenado (18, B), na última célula da coluna E, deve ser feita da seguinte forma: é possível atingir o vértice E com distância 18 vindo do vértice B. Em seguida, analisa-se a última célula da coluna B, (15, Q), onde nota-se que é possível atingir o vértice B com distância de 15 vindo de Q. Na coluna Q, é possível notar que o vértice Q pode ser atingido com distância de 9 vindo de P. Por fim, na última célula da coluna P, nota-se que é possível atingir o vértice P com distância 6 vindo de J. Portanto o menor caminho do vértice J ao vértice E no grafo inicial dado é Casa de João, passando pela Pracinha, em seguida Quitanda, Banca de Jornal e, por fim, a Escola, percorrendo uma distância de 18.

Com a tabela, é possível listar o menor caminho a partir do vértice J para qualquer outro vértice de forma eficiente.

- J ao E: J→P→Q→B→E com distância 18
- J ao C: J→P→C com distância 12
- J ao B: J→P→Q→B com distância 15
- J ao Q: J→P→Q com distância 9
- J ao P: J→P com distância 6
- J ao A: J→A com distância 5

A solução apresentada para o problema ilustra a potencialidade da Teoria dos Grafos para a solução de problemas reais utilizando-se apenas, além da própria teoria, conceitos e operações da matemática básica.